STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

STATISTISCHE AFDELING

S 16

Hemelrijk J

# Beantwoording van enkele vragen omtrent de grondslagen der waarschijnlijkheidsrekening.

(MANUSCRIPT)

1949

Amsterdam, 16 Juni 1949.

Geachte Heer,

Met genoegen zal ik trachten de door U onderworpen begripsmoeilijkheid op te helderen, te meer daar (Uw vraag) het centrale punt is van de toepassing der waarschijnlijkheidsrekening betreft. De door U genoemde kwestie is er een, die reeds vanaf het ~~begin~~ ontstaan van de waarschijnlijkheidsrekening veler hoofd beziggehouden en waarvan een duidelijke beantwoording niet zo gemakkelijk in de litteratuur te vinden is; het boek van E. Borel, Valeur pratique et philosophie des probabilités ~~[illegible]~~, Gauthier-Villars, Paris 1939 zal U echter wellicht interesseren, daar dit o.a. de grondslagen behandelt.

Men kan de toepassing van de waarschijnlijkheidsrekening ~~[illegible]~~ op de volgende wijze beschouwen:

De door U genoemde ervarings-wet, dat het toeval naar een gemiddelde drift, die gewoonlijk de wet der grote getallen wordt genoemd, kan uit een eenvoudigere wet worden afgeleid, nl. uit de volgende:

Indien men een ~~wet~~ experiment, dat verschillende uitkomsten kan hebben, waaronder er een" is (die we b.v. met A aangeven), die een zeer geringe waarschijnlijkheid bezit, $n$" maal uitvoert, treedt A niet op.

Men dient hieruit ~~dat~~ ~~op te vatten~~ de conclusie te trekken dat A ~~[illegible]~~ onmogelijk kan optreden, immers dan zou de kans op het optreden van A gelijk nul moeten zijn; men kan echter wel ~~[illegible]~~ zeggen, dat het optreden van A, indien men het experiment $n$" maal uitvoert, „practisch onmogelijk" is. Men houdt dan ook met de mogelijkheid, dat A optreedt, in de practijk geen rekening. ~~[illegible]~~ Het volgende voorbeeld kan dit misschien duidelijk maken: stel U voor, dat U een ~~[illegible]~~ bak hebt met een million knikkertjes, waaronder zich $n$" zwart knikkertjes bevindt. Indien U blindelings een knikkertje uit deze bak trekt, zal het „practisch zeker" ~~[illegible]~~ niet het zwarte zijn. Het is, dat zelfs U vermoedelijk niet mij een zijn, volkomen verantwoord te voorspellen, dat niet het zwarte knikkertje getrokken zal worden. Dit wordt ~~[illegible]~~ door experimenten bewezen, o.a. door de door U uitgevoerde. De bovenstaande wet dient dan ook, evenals wet der grote getallen gewoonlijk gebeurt, als een ervarings-wet te worden opgevat. ~~[illegible]~~

Ik zal nu niet ingaan op de wijze, waarop uit deze eenvoudigere wet die der grote getallen afgeleid kan worden, daar dit voor Uw vraag weinig ter zake doet. Wel moet ik

wijzen op een andere directer gevolg van deze wet, dat hieruit bestaat, dat bij een enkel experiment een uitkomst B, die een zeer grote (d.w.z. zeer dicht bij 1 gelegen kans bezit) „practisch zeker" wel optreedt. Deze wet is ~~het complement van~~ equivalent met de bovenstaande, zoals gemakkelijk is in te zien.

Indien men nu echter het experiment n groot aantal maal herhaalt, is de kans, dat onder al de zo verkregen uitkomsten A eens zal optreden groter dan de kans, dat dit bij een enkel experiment zal gebeuren. Men kan zelfs, als de kans op A bij een experiment bekend is, uitrekenen hoevaak men het experiment zou moeten herhalen, om „practisch zeker" te zijn, dat A minstens eenmaal zou optreden. En zou men inderdaad het experiment zo vaak herhalen, dan zou dit deze voorspelling ook bevestigen, evenals U experimenten de wet der grote getallen bevestigen. Dit is in het geheel niet in tegenstrijd met de kleine kans op het optreden van A bij een experiment. Stel men daarom n experimenten uit, dan is het optreden van A bij ieder van deze experimenten op zichzelf een onwaarschijnlijk en men zal dan ook nooit kunnen voorspellen bij welk van deze n experimenten A zal optreden. Indien men dus b.v. voorspelt: „bij het eerste experiment zal A optreden", dan is deze voorspelling practisch zeker fout. Evenzeer indien men zegt: „bij het 5226e experiment zal A optreden." Indien men echter zegt: „Onder de eerste n (met n voldoende groot) experimenten bevindt er zich een, waarbij A optreedt", dan doet men een uitspraak ~~niet~~ over een samengesteld experiment en niet meer over de experimenten afzonderlijk. Het samengestelde experiment is: n maal het oorspronkelijke experiment uit te voeren. Tot men nu dit samengestelde experiment als een enkel experiment van een hogere trap op, dan heeft daarbij het minstens eenmaal optreden van A een zeer grote kans, dus het in het geheel niet optreden van A een zeer geringe en men zal dus, op grond van de genoemde ervaringswet met een gerust hart kunnen ~~zeg~~ voorspellen, dat A minstens eenmaal ~~zou~~ zal optreden. Men kan echter in het geheel niets zeggen over de plaats in de serie experimenten, waar dit ~~zou~~ zal gebeuren.

F Het is dus slechts een kansverschil en zeer kleine kans (zoals 1/240) van waarschijnlijkheid niet te onderscheiden, als het experiment vaak herhaald kan worden.

F achterzijde)

Zoals U zelf zoeken wij de oplossing in de richting, die U zelf ook aanduidt. In verband daarmee nog eens over de kans ~~van roulette~~ om 40 maal achter elkaar kruis te gooien met een zuivere munt. Deze is inderdaad 1/2^40, d.w.z. het is practisch onmogelijk, als iemand het U voor zou doen ~~hebt U het a~~ kunt U met het volste vertrouwen concluderen, dat de munt niet zuiver is, of de wijze van werpen niet in orde. Indien U echter het geduld zoudt hebben om ~~zo~~ te blijven kijken tot het experiment enige milliarden maal herhaald is, durf ik U wel te voorspellen, dat U dat eenmaal niet zult hebben meegemaakt. F ~~Het onderscheiden van zeer kleine kans door een getal (zoals 1/240), zo dus alleen kansverschil, als het experiment zeer vaak herhaald kan worden.~~ Dit is een situatie die in natuur- en scheikundige problemen vaak optreedt; maar inderdaad is het bij het werpen van een munt niet zeer zuiver, omdat een dergelijke lange series experimenten nauwelijks te verwachten is. Dat (reizend) in de boeken over waarschijnlijkheidsrekening toch vaak gesproken wordt wordt zijn oorzaak in het feit, dat het werpen met een munt of dobbelsteen e.d. als eenvoudig voorstelbaar model ~~worden gebr~~ voor vergelijkbare situaties worden gebruikt.

Tenslotte nog een korte opmerking over Uw trekkingscijfers. In Engeland zijn zeer grote dergelijke reeksen gepubliceerd door L.H.C. Tippett, Random Sampling numbers, Cambridge University Press 1927 en door M.G. Kendall and B. Babington Smith, Tables of random sampling numbers, Cambridge University Press 1939. Indien het U dus niet om de experimenten maar om de resultaten daarvan te doen is, zoudt U Uw series daaruit kunnen halen. In Uw wijze van uitvoeren van het trekkingsexperiment zit bovendien een inconsequentie: zoals U zelf zegt, heeft het toeval geen geheugen; door echter het getrokken ~~nummer~~ kaartje bovenin de schaal te leggen en dan weer onderuit te nemen geeft U echter het toeval wel een geheugen, daar het op die wijze onmogelijk wordt hetzelfde ~~nummer~~ kaartje direct weer te trekken. Strict genomen zou U trouwens iedere keer trekkingen de stukjes karton flink dooreen moeten mengen. Daar echter het aantal kaartjes vrij groot is, bezitten Uw trekkingsreeksen vermoedelijk toch wel het karakter van toevalsreeksen, zoals U die wenst.

Hopende U ~~niet door~~ de gewenste inlichtingen te hebben verschaft, Hoogachtend